Föreläsning 8

Ex:

Låt $f(x)=\frac{1}{x}$. Om vi deriverar denna funktion så får vi att

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

Nu kan man förstås fortsätta derivera $f'(x)$, och då får vi

$$f''(x)=\frac{1}{x^4}\cdot 2x=\frac{2}{x^3}$$

Man kan även derivera vidare.

Vi ska nu diskutera notationen för högre ordningens derivata. Låt $y=f(x)$ vara en funktion. Då är f:s andraderivata:

$$f''(x)=y''(x)=\frac{d^2}{dx^2}f(x)=D_x^2 y(x)=D_x^2 f(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}f(x).$$

Tredjederivatan är

$$f'''(x)=y'''(x)=\frac{d^3}{dx^3}f(x)=D_x^3 y(x)=D_x^3 f(x)=\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}f(x).$$

Från och med fjärde derivator och uppåt så använder man notationen:

$$f^{(n)}(x) = y^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = D_x^n y(x) = D_x^n f(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \underbrace{\frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx}}_{n \text{ stycken}} f(x)$$

för $n = 4, 5, \ldots$.

Andra-derivator, som vi ska se senare, används bland annat till för att avgöra max och minpunkter för funktioner.

Låt oss gå över till flera variabler igen och beräkna högre ordningens partiella derivator.

Låt $w = f(x, y, z)$ vara en funktion i 3-variabler.

Om vi ska derivera f m.a.p. x n stycken gånger så skriver vi ungefär som i det 1-dimensionella fallet.

$$\frac{\partial^n w}{\partial x^n} = \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x,y,z) = f_{\underbrace{x \ldots x}_{n \text{ st.}}}(x,y,z) = f_{\underbrace{1 \ldots 1}_{n \text{ st.}}}(x,y,z)$$

På liknande sätt för derivator m.a.p y och z.

Denna notation använder jag ej.

Men då man har flera variabler så vill man ibland först derivera m.a.p x och sen y, eller derivera flera gånger m.a.p x, y och z i olika ordningar. Detta skriver man som.
(Vi gör specialfallet med tre derivator här.)

$$\frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x \partial y \partial z} = f_{zyx}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z).$$

$$\frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x^2 \partial y} = f_{yxx}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z).$$

$$\frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x^2 \partial z} = f_{zxx}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)$$

$\vdots$

o.s.v.

Däremot så kan man fråga sig om

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$$ eller $$\frac{\partial f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial f}{\partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x \partial z}$$

I vissa fall är dem det, men detta får ni lära er i en flervariabel kurs.

Låt oss kolla på några exempel på högre ordningens derivator, både i $\underline{1}$ och flera variabler.

<u>Ex.</u>

Låt $f(x) = \cos(\sqrt{x})$. Hitta $f''(x)$ och $f'''(x)$.

Vi har att

$$f'(x) = -\sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.$$

och

$$f''(x) = \frac{-\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-\cos(\sqrt{x})}{4x}$$

och

$$f'''(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{4x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sin(\sqrt{x})}{8x^{3/2}}$$

Man kan även visa att

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin(\sqrt{x})}{2^{n} x^{n/2}} & n \text{ udda.} \\ \dfrac{(-1)^{n/2} \cos(\sqrt{x})}{2^{n} x^{n/2}} & n \text{ jämn.} \end{cases}$$

Ex.

Låt $f(x,y,z) = \ln(xyz)$. Hitta $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}.$

Vi har att

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{yz}{xyz} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{xz}{xyz} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{xy}{xyz} = \frac{1}{z}.$$

Detta ger att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = -\frac{1}{y^2}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = -\frac{1}{z^2}$, Alla mixade derivator är noll.

Ex:

Låt $f(x,y,z) = \cos(x^2+y^2+z^2)$. Hitta $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}$.

Vi börjar med att hitta $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\sin(x^2+y^2+z^2) \cdot 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\sin(x^2+y^2+z^2) \cdot 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\sin(x^2+y^2+z^2) \cdot 2z.$$

Vi måste nu hitta $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -\cos(x^2+y^2+z^2) \cdot 2z \cdot 2x$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -\cos(x^2+y^2+z^2) \cdot 2x \cdot 2z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\cos(x^2+y^2+z^2) \cdot 2z \cdot 2y$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -\cos(x^2+y^2+z^2) \cdot 2y \cdot 2z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\cos(x^2+y^2+z^2) \cdot 2x \cdot 2y$$

$$\Vert$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\cos(x^2+y^2+z^2) \cdot 2y \cdot 2x.$$

Vi fortsätter nu med att hitta de derivator som vi skulle hitta:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\cos(x^2+y^2+z^2) \cdot 4yz\right) =$$

$$= \sin(x^2+y^2+z^2) \cdot 4yz \cdot 2x.$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\cos(x^2+y^2+z^2) \cdot 4xz\right) =$$

$$= \sin(x^2+y^2+z^2) \cdot 4xz \cdot 2y.$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\cos(x^2+y^2+z^2) \cdot 4xy\right) =$$

$$= \sin(x^2+y^2+z^2) \cdot 4xy \cdot 2z.$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\cos(x^2+y^2+z^2) \cdot 4yz\right) =$$

$$= \sin(x^2+y^2+z^2) \cdot 4yz \cdot 2x$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\cos(x^2+y^2+z^2) \cdot 4xy\right) = \sin(x^2+y^2+z^2) \cdot 4xy \cdot 2z$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\cos(x^2+y^2+z^2) \cdot 4zx\right) = \sin(x^2+y^2+z^2) \cdot 4zx \cdot 2y.$$

Alltså: är

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x} =$$

$$= \sin(x^2+y^2+z^2) \cdot 8xyz.$$

Ex:

Betrakta
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Hitta $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Vi har att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{(2y(x^2-y^2) + 2xy \cdot 2x)(x^2+y^2) - 2xy(x^2-y^2) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Utveckla och förenkla $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{(2yx^2 - 2y^3 + 4x^2y)(x^2-y^2) - 4x^4y + 4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2yx^4 - \cancel{2x^2y^3} + \cancel{4x^4y} - \cancel{2y^3x^2} + 2y^5 - 4x^2y^3 - \cancel{4x^4y} + \cancel{4x^2y^3}}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^4y + 8x^2y^3 - 2y^5}{(x^2+y^2)^2} = $$

Alltså är

$$= \frac{2y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{2y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Vidare så är

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \frac{(2x(x^2-y^2) + 2xy\cdot(-2y))(x^2+y^2) - 2xy(x^2-y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Utveckla och förenkla nu $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{(2x^3 - 2xy^2 + 4xy^2)(x^2+y^2) - 4x^3y^2 + 4xy^4}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^5 + \cancel{2x^3y^2} - \cancel{2x^3y^2} - 2xy^4 - 4x^3y^2 - \cancel{4xy^4} - 4x^3y^2 + \cancel{4xy^4}}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^5 - 8x^3y^2 - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

Alltså: då

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \frac{2x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vad blir då $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}$?

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x} = \begin{cases} \frac{2(x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6)}{(x^2+y^2)^3} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Däremot så kan man beräkna att

$$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial y}(0,0) = 2$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(0,0) = -2 .$$

Anledning att detta händer är att $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}$ och

$\frac{\partial f}{\partial y \partial x}$ inte är kontinuerliga!

Man får alltså inte alltid likhet i

mixade derivator.